第 2 节 数量积的常见几何方法（★★★）

内容提要

用定义计算向量的数量积是基本方法，但有一定的局限性，本节我们归纳几种数量积的几何计算方法.

1．极化恒等式：如图 1，设 D 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$，因为 $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB})=|AD|^2-|BD|^2$，这一结论叫做极化恒等式，它常用于计算共起点、底边长已知的两个向量的数量积，其好处是把本来需要夹角才能计算的数量积转化成只需长度即可计算的量.

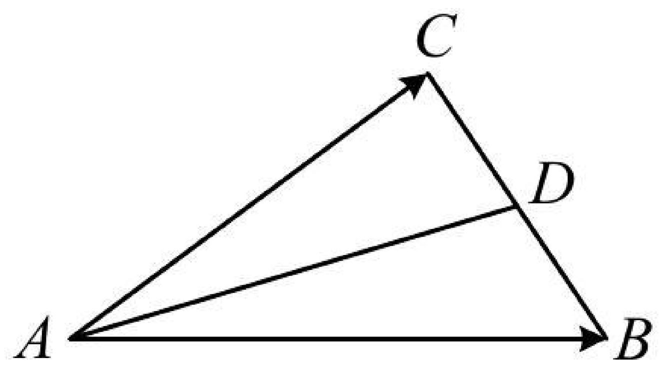


图1

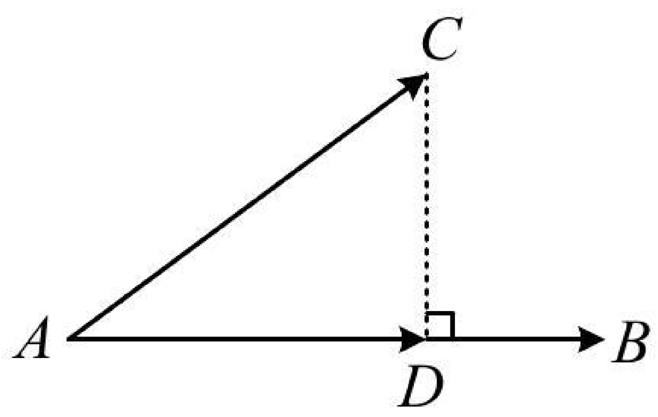


图2

2．投影法：如图 2，$CD\perp AB$ 于 D，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，我们把 $\overrightarrow{AD}$ 叫做 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量，上述求数量积的方法叫做投影法. 当两个向量中一个不变，另一个在该向量上的投影向量容易分析时，用投影法求数量积很方便.

3．拆解法：若图形中有两个不共线的向量既知道长度，又知道夹角，不妨选择它们作为基底，把求数量积的向量都用这组基底表示，从而转化为基向量的数量积来算.

典型例题

类型Ⅱ：极化恒等式

【例 1】边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，E，F 在线段 BD 上，且 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BF}|$，则：

（1）若 $|\overrightarrow{BD}|=4|\overrightarrow{DE}|$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$_____；（2）$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的取值范围是_____.

解析：（1）$\overrightarrow{AE}$ 与 $\overrightarrow{AF}$ 共起点，且中线、底边易求，符合极化恒等式的使用场景，先取中点，

如图，取 EF 中点 G，连接 AG，因为 $|\overrightarrow{DE}|=|\overrightarrow{BF}|$，所以 G 也是 BD 的中点，

由极化恒等式，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AG}|^2-|\overrightarrow{EG}|^2$ ①，因为 G 是 BD 的中点，所以 $|\overrightarrow{AG}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

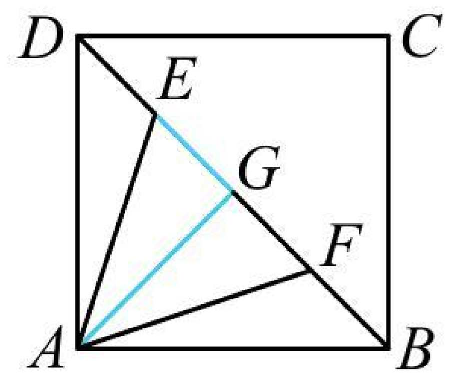
又 $|\overrightarrow{BD}|=4|\overrightarrow{DE}|$，所以 $|\overrightarrow{EG}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{2}}{4}$，代入①得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{4})^2=\frac{3}{8}$.

（2）E，F 变成了动点，但中线、底边易求，仍满足极化恒等式的使用场景，

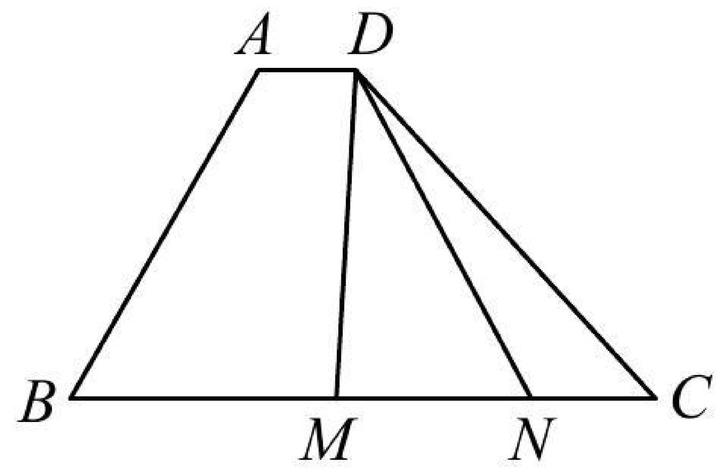
由极化恒等式，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AG}|^2-|\overrightarrow{EG}|^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2-|\overrightarrow{EG}|^2=\frac{1}{2}-|\overrightarrow{EG}|^2$，

由图可知 $0\le|\overrightarrow{EG}|\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $0\le\frac{1}{2}-|\overrightarrow{EG}|^2\le\frac{1}{2}$，故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的取值范围是 $[0,\frac{1}{2}]$.

答案：（1）$\frac{3}{8}$；（2）$[0,\frac{1}{2}]$



【变式】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$，$AD // BC$，$AB=4$，若 M,N 是直线 BC 上的动点，且 $|\overrightarrow{MN}|=2$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为_____.



解析：$\overrightarrow{DM}$ 与 $\overrightarrow{DN}$ 共起点，且底边长已知，符合极化恒等式的使用场景，先取中点，

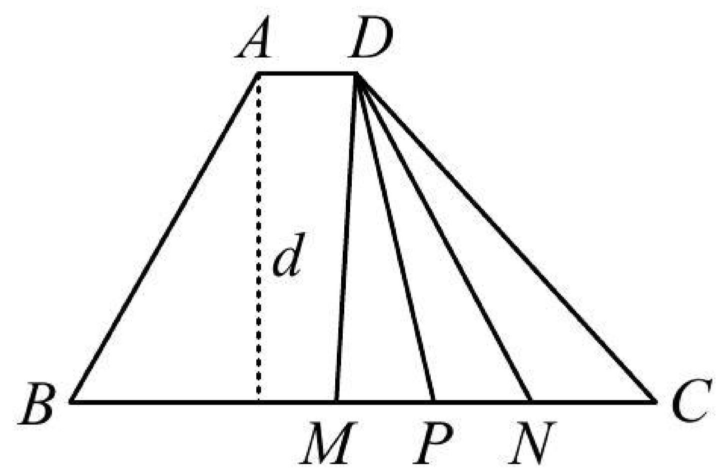
如图，设 MN 的中点为 P，由极化恒等式，$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=|\overrightarrow{DP}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2=|\overrightarrow{DP}|^2-1$，故只需求 $|\overrightarrow{DP}|$ 的最小值，

由图可知当 $DP\perp BC$ 时，$|\overrightarrow{DP}|$ 最小，

所以 $|\overrightarrow{DP}|$ 的最小值即为平行线 AD 和 BC 之间的距离 d，

而 $d=|AB|\sin\angle B=4\sin 60^{\circ}=2\sqrt{3}$，所以 $(\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN})_{\min}=(2\sqrt{3})^2-1=11$.

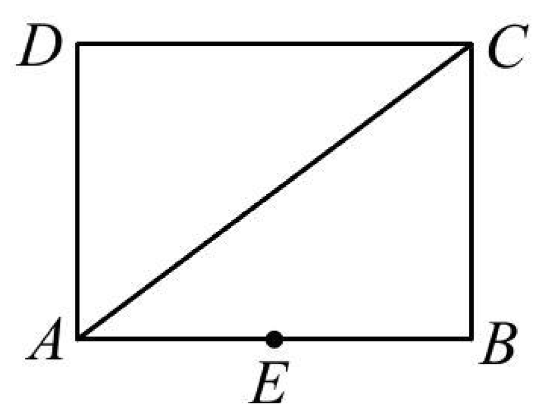
答案：11



【总结】用极化恒等式求数量积常有两个特征：①共起点；②底边长已知，或中线、底边易求.

类型Ⅱ：投影法

【例 2】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=3$，E 为 AB 中点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$_____.



解法 1：$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$ 的长度、夹角都容易计算，故可用定义求数量积，

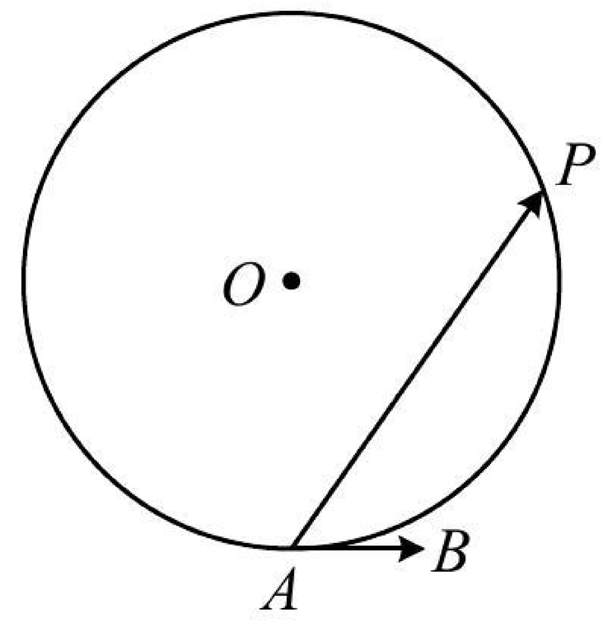
由题意，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=2$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot\cos\angle CAE=5\times2\times\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=10\times\dfrac{4}{5}=8$.

解法 2：观察图形发现 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AE}$ 上的投影向量很好找，故用投影法求数量积更方便，

由图知 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AE}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos 0^{\circ}=4\times 2\times 1=8$.

答案： 8

【变式】如图，P 为半径为 2 的圆 O 上的动点，AB 为与圆 O 相切的单位向量，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是_____.



解析： 数量积中的 $\overrightarrow{AB}$ 不变，符合投影法的使用场景，如图，只需分析 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}$，

如图，当 P 与 P_1 重合时，$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ_1}$，此时投影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 同向且长度最大，

所以 $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})_{\max}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_1}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AQ_1}\right|=1\times 2=2$，

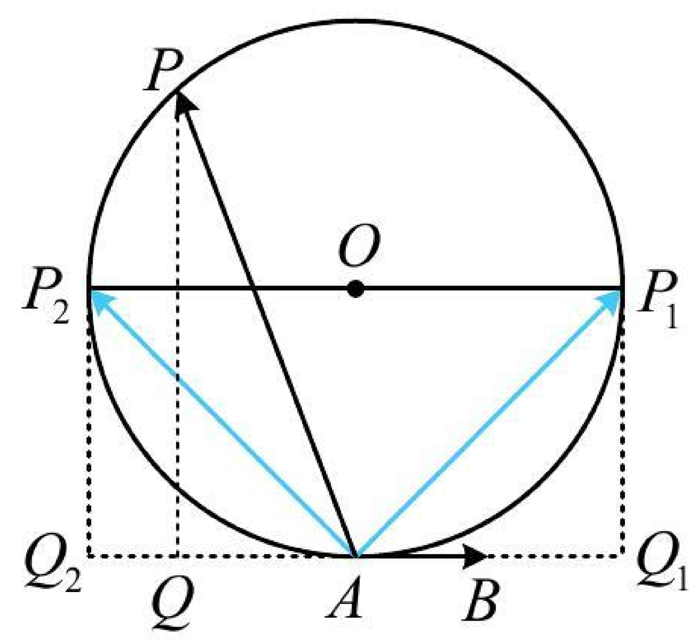
当 P 与 P_2 重合时，$\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ_2}$，

此时投影向量与 $\overrightarrow{AB}$ 反向且长度最大，

所以 $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})_{\min}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ_2}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AQ_2}\right|\cdot\cos\pi=1\times 2\times(-1)=-2$，

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是 $[-2,2]$.

答案： $[-2,2]$



【总结】当两个向量一个不变，另一个在该向量上的投影向量容易分析时，可用投影法求数量积.

类型III：拆解法

【例 3】ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，Q 为 AC 中点，P 为 AB 上靠近 A 的三等分点，则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}=$_____.

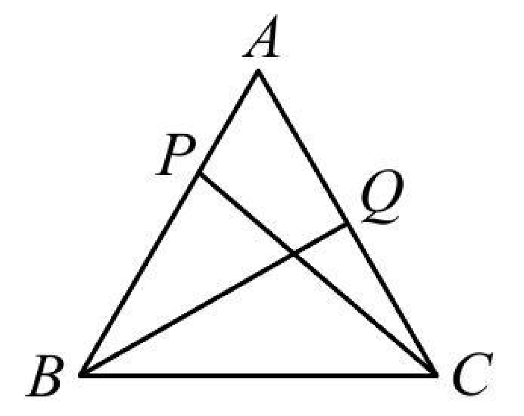
解析： $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 知道长度和夹角，可尝试拆解法，选它们为基底来表示 $\overrightarrow{CP}$ 和 $\overrightarrow{BQ}$，

由题意，$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BQ}=(-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$

$=-\frac{1}{3}\times 2^2+\frac{7}{6}\times 2\times 2\times\cos 60^{\circ}-\frac{1}{2}\times 2^2=-1$.

答案：-1



【反思】拆解法的核心是选择两个既知道长度又知道夹角的向量作为基底，一般会往特殊图形的边上进行拆解（注意，不是绝对）.

【变式】在ΔABC中，$AB=\sqrt{2}$，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{4}$，$O$是$\Delta ABC$的外心，则$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$的最大值为（　　）

（A）0　（B）1　（C）3　（D）5

解析：ΔABC已知一角及对边，其外接圆半径可求，故把涉及的向量全部往$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$转化，

如图，设ΔABC的外接圆半径为r，由正弦定理，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2=2r$，所以$r=1$，故$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$，

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}^2$

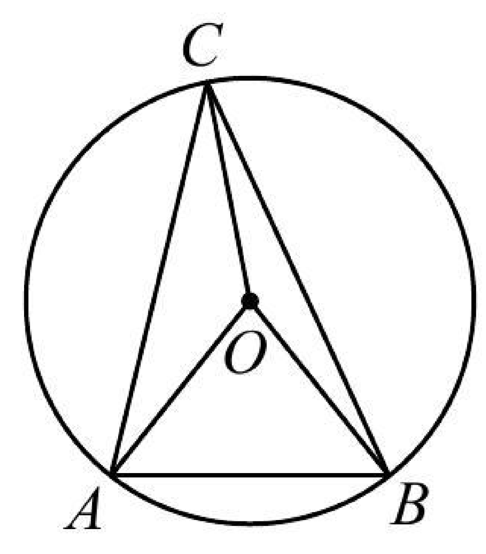
$=-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}^2=-2\cos\angle AOC+\cos\angle AOB+1$ ①，

因为$\angle ACB=\dfrac{\pi}{4}$，所以$\angle AOB=2\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，故$\cos\angle AOB=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，

代入①得：$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1-2\cos\angle AOC$，

所以当$\angle AOC=\pi$时，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$取得最大值3.

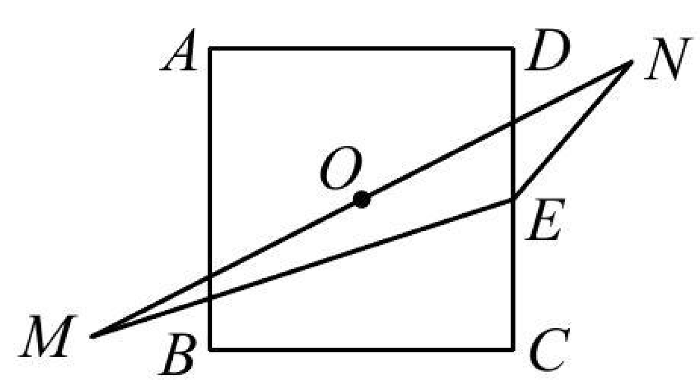
答案：C



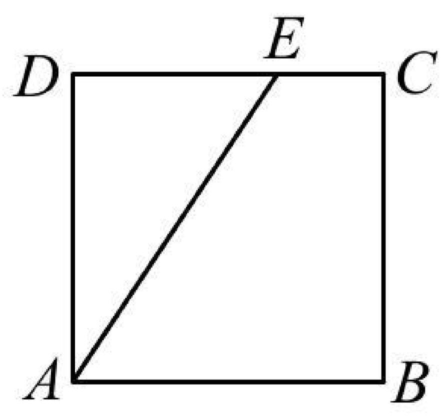
【反思】圆中求数量积，如考虑拆解法，常选择分解为半径对应向量.

强化训练

1.（2023•山东潍坊模拟•★★）如图，在边长为2的正方形$ABCD$中，其对称中心O平分线段MN，且$MN=2BC$，点E为CD的中点，则$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=$_____.

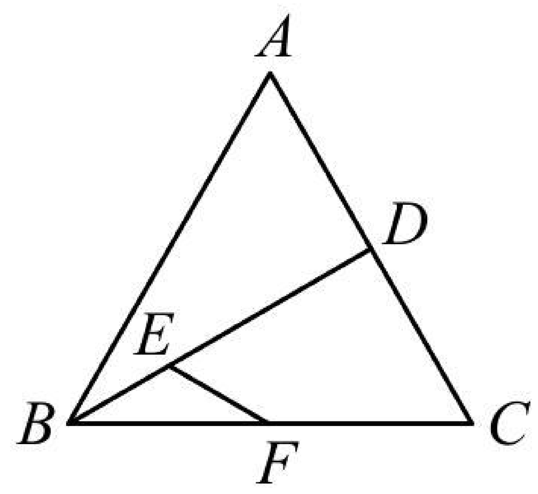


2．（★★）如图，边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，E 是线段 CD 上的动点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是_____.

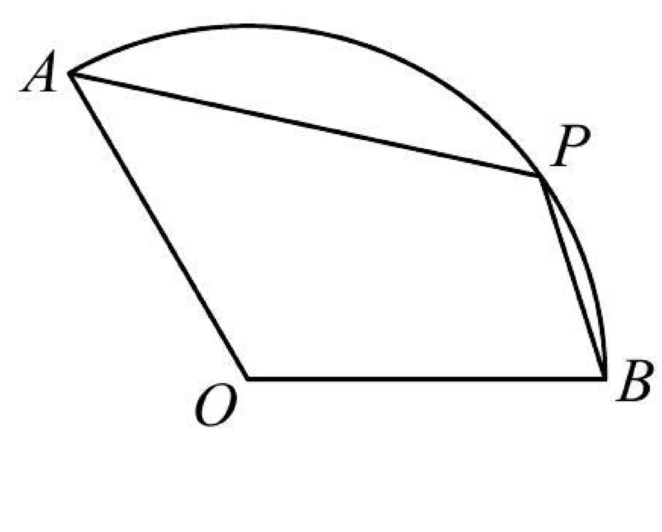


答

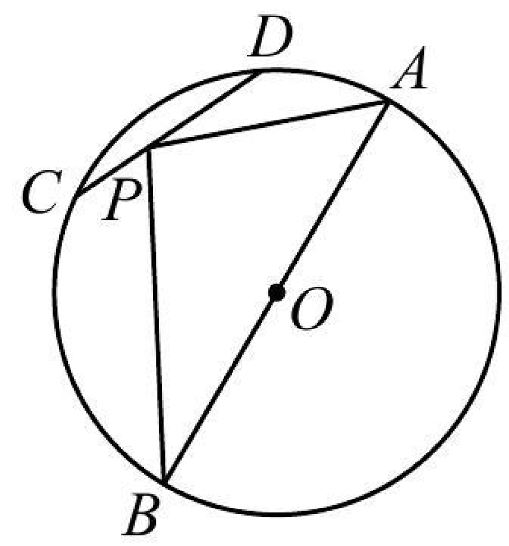
3．（2023 •山东模拟 •★★）如图，边长为 2 的正 ΔABC 中，D 为 AC 中点，E 在线段 BD 上，且 $BD=3BE$，F 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____.



4．（★★★）如图，扇形 AOB 的圆心角为120°，半径为 2，P 是圆弧 AB 上的动点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是_____.



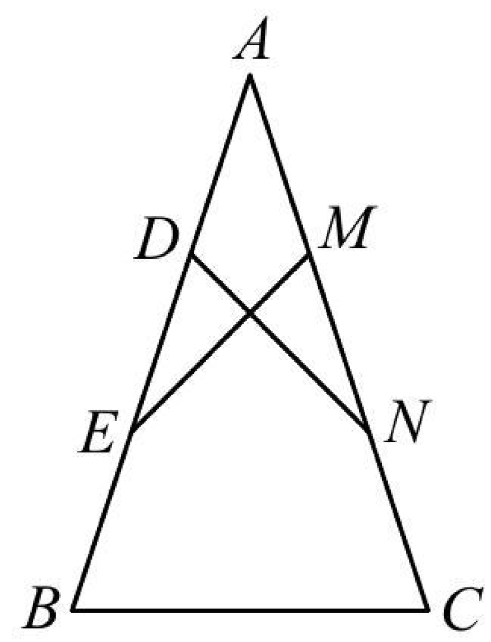
5．（2022 • 浙江杭州模拟 • ★★★）圆是中华民族传统文化的形态象征，象征着“圆满”和“饱满”，是自古以和为贵的中国人所崇尚的图腾. 如图，AB 是圆 O 的一条直径，且 $|AB|=4$，C，D 是圆 O 上的任意两点，$|CD|=2$，点 P 在线段 CD 上，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值是_____.



6．（2020 • 新高考 I 卷 • ★★★）已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-2,6)$　（B）$(-6,2)$　（C）$(-2,4)$　（D）$(-4,6)$

7．（2022 • 天津模拟 • ★★★）如图，在等腰 ΔABC 中，$AB=AC=3$，D，E 与 M，N 分别是 AB，AC 的三等分点，且 $\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{ME}=-1$，则 $\tan A=$_____，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$_____.



8．（2022·天津模拟·★★★）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=60^{\circ}$，若 M 为 BC 的中点，N 是线段 BD 上的动点，则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的取值范围为_____.